

Каждая правильно решенная задача оценивается в 10 баллов.

Физика 8 класс.

1. Вася отправился в лес по грибы. Грибов попадалось мало, и путь становился долгим. Для того чтобы не заблудиться при возвращении, он решил через каждый час оставлять метки. Через 15 минут после того, как Вася оставил вторую метку, он нашел первую и понял, что движется по кругу. Какова протяженность этого круга, если средняя скорость передвижения Васи по лесу была 4 км/ч?

Решение.

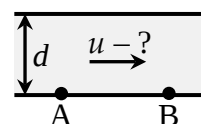
Весь путь по кругу длины L Вася прошёл за $t_1 + t_2$, где $t_1 = 1$ ч — время движения между первой и второй меткой, и $t_2 = 15$ мин = $1/4$ ч — время движения между второй и первой меткой. Двигаясь со средней скоростью $v = 4$ км/ч, всего Вася прошёл путь

$$L = v(t_1 + t_2). \quad (8 \text{ б.})$$

Подставив численные значения, получим

$$\text{ответ: } L = 5 \text{ км.} \quad (2 \text{ б.})$$

2. Пункты А и В расположены на одном берегу реки. Пункт В расположен ниже по течению. На путь из пункта А в пункт В катер затрачивает время t_1 . Обратный путь, из В в А, — занимает время t_2 . Определите скорость течения реки, если известно, что минимальное время, за которое катер может пересечь реку от берега до берега, равно t_3 , а ширина реки — d .



Решение.

Пусть u — скорость течения реки, а v — скорость катера. Из условия очевидно, что $v > u$, иначе катер не смог бы доплыть до пункта, находящегося выше по течению.

Скорость движения катера относительно берега складывается из скорости катера и скорости течения реки:

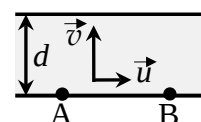
$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} + \vec{u}$$

Когда катер движется по течению, из пункта А в пункт В, скорости катера и течения направлены в одну сторону, и его скорость относительно берега равна $v + u$. При движении против течения, на обратном пути из В в А — скорости катера и течения направлены в противоположные стороны, и его скорость относительно берега равна $v - u$. (2 б.)

Равенство прямого и обратного путей между пунктами А и В можно записать в виде:

$$(v + u)t_1 = (v - u)t_2. \quad (1) \quad (3 \text{ б.})$$

Минимальное время, за которое катер может пересечь реку, достигается тогда, когда скорости катера и течения реки направлены взаимно перпендикулярно (см. рисунок). В этом случае скорость движения поперёк реки максимальна и равна v , поэтому

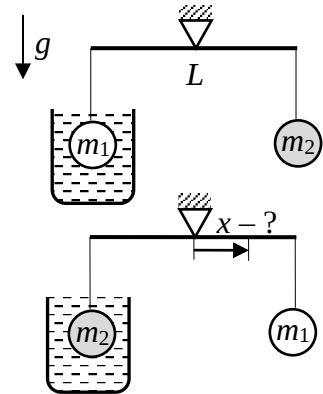


$$d = v t_3. \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

Выразив u из (1), и подставив в получившееся выражение v , выраженное из (2), найдём

$$\text{ответ: } v = \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1} \frac{d}{t_3}. \quad (2 \text{ б.})$$

3. К концам равноплечих рычажных весов подвешены два одинаковых по размеру шарика с массами m_1 и m_2 . Рычаг невесомый и имеет длину L . Шарик m_1 погружен в стакан с жидкостью. При этом весы находятся в равновесии. Затем шарики поменяли местами. На какое расстояние x необходимо передвинуть точку подвеса рычажных весов, чтобы они вновь оказались в равновесии?



Решение.

Вес шариков приложен к концам рычага весов. Когда первый шарик был погружен в жидкость его вес уменьшается на величину выталкивающей силы Архимеда F_A . Вес первого шарика равен $m_1 g - F_A$, а вес второго — $m_2 g$.

В равновесии сумма моментов всех сил, приложенных к рычагу, равна нулю. Условие равновесия относительно точки подвеса запишется в виде:

$$(m_1 g - F_A) \cdot \frac{L}{2} = m_2 g \cdot \frac{L}{2}. \quad (1) \quad (4 \text{ б.})$$

Когда шарики поменяли местами, условие равновесия относительно новой точки подвеса запишется аналогично:

$$(m_2 g - F_A) \cdot \left(\frac{L}{2} + x \right) = m_1 g \cdot \left(\frac{L}{2} - x \right). \quad (2) \quad (4 \text{ б.})$$

Поскольку объёмы шариков одинаковы, и жидкость в стакане та же, то сила Архимеда, действующая на второй шарик, такая же как на первый шарик.

Выразив F_A из (1) и подставив в (2), а затем выразив искомое x , получим

$$\text{ответ: } x = \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2} \right) L. \quad (2 \text{ б.})$$

4. В термос с водой опущен термометр, который показывает температуру T_0 . В воду бросили кусочек льда массой Δm , имеющий температуру 0°C . Когда лёд растаял, термометр показал температуру T_1 . Затем в воду бросили ещё один такой же кусочек льда. После того, как лёд растаял, термометр показал температуру T_2 . Определите массу m воды, изначально находившейся в термосе.

Решение.

Поскольку кусочки льда изначально находятся при температуре плавления $T = 0^\circ\text{C}$, то в процессе их теплового взаимодействия с водой они плавятся без предварительного нагрева. За счёт остывания воды, находившейся в термосе, выделяется теплота, которая идёт на плавление кусочка льда и нагрев воды, образовавшейся в результате плавления льда. Соответствующее уравнение теплового баланса можно записать в виде:

$$cm(T_0 - T_1) = c\Delta m(T_1 - T) + Q, \quad (1) \quad (4 \text{ б.})$$

где c — удельная теплоёмкость воды, Q — теплота плавления кусочка льда.

Затем в воду бросили второй кусочек льда. Соответствующее уравнение теплового баланса запишется аналогично:

$$c(m + \Delta m)(T_1 - T_2) = c\Delta m(T_2 - T) + Q. \quad (2) \quad (4 \text{ б.})$$

Здесь мы учли, что перед бросанием второго кусочка льда, масса воды в термосе увеличилась на Δm .

Вычитая (1) из (2) и выражая искомую m , получим

$$\text{ответ: } m = 2 \frac{T_1 - T_2}{T_0 + T_2 - 2T_1} \Delta m. \quad (2 \text{ б.})$$

Каждая правильно решенная задача оценивается в 10 баллов.

Физика 9 класс.

1. Кусок однородной проволоки длины 10 см разрезали на два куска. Найти длины этих кусков, если при параллельном соединении их общее сопротивление составило 0,24 от сопротивления исходного куска.

Решение.

Сопротивление проволоки длины L с удельным сопротивлением ρ и сечением S равно

$$R = \frac{\rho}{S} L. \quad (1) \quad (1 \text{ б.})$$

Если проволока однородная, то сопротивление куска проволоки пропорционально его длине. Обозначим длины двух кусков, получившихся после разрезания проволоки, l_1 и l_2 :

$$l_1 + l_2 = L. \quad (2) \quad (1 \text{ б.})$$

При параллельном соединении складываются обратные сопротивления, поэтому получившееся сопротивление $R_{\parallel}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{R_{\parallel}} = \frac{1}{\frac{\rho}{S} l_1} + \frac{1}{\frac{\rho}{S} l_2}. \quad (2 \text{ б.})$$

Умножив это уравнение на (1), получим

$$\frac{R}{R_{\parallel}} = \frac{L^2}{l_1 l_2}. \quad (2 \text{ б.})$$

По условию, $R_{\parallel} / R = 0,24$. Поэтому

$$l_1 l_2 = 0,24 L^2. \quad (3) \quad (2 \text{ б.})$$

Решая систему уравнений (2) и (3), найдём $l_1 = 0,4L$ и $l_2 = 0,6L$ (или $l_1 = 0,6L$ и $l_2 = 0,4L$). Подставив значение $L = 10\text{см}$, получим

$$\text{ответ: } 4\text{см и } 6\text{см}. \quad (2 \text{ б.})$$

2. В термос с водой опущен термометр, который показывает температуру T_0 . В воду бросили кусочек льда. Когда лёд растаял, термометр показал температуру T_1 . Затем в воду бросили ещё один такой же кусочек льда, который находился при той же начальной температуре, что и первый. После того, как лёд растаял, термометр показал температуру T_2 . Определите массу Δm кусочка льда, если известно, что изначально в термосе находилась вода массы m . Теплоемкостями термоса и термометра пренебречь.

Решение.

За счёт остывания воды, находившейся в термосе, выделяется теплота, которая идёт на нагрев и плавление кусочка льда, а также нагрев воды, получившейся в результате плавления льда. Соответствующее уравнение теплового баланса можно записать в виде:

$$cm(T_0 - T_1) = c\Delta m(T_1 - T) + Q, \quad (1) \quad (4 \text{ б.})$$

где c — удельная теплоёмкость воды, $T = 0^\circ\text{C}$ — температура плавления льда, Q — теплота, которая пошла на нагрев до 0°C и плавление кусочка льда.

Затем в воду бросили второй кусочек льда. Соответствующее уравнение теплового баланса запишется аналогично:

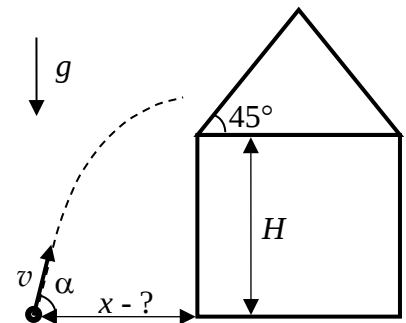
$$c(m + \Delta m)(T_1 - T_2) = c\Delta m(T_2 - T) + Q. \quad (2) \quad (4 \text{ б.})$$

Здесь мы учли, что перед бросанием второго кусочка льда, масса воды в термосе увеличилась на Δm .

Вычитая (1) из (2) и выражая искомую m , получим

$$\text{ответ: } \Delta m = \frac{m}{2} \cdot \frac{T_0 + T_2 - 2T_1}{T_1 - T_2}. \quad (2 \text{ б.})$$

3. Катапульта бросает теннисный шарик с начальной скоростью v под углом α к горизонту. Шарик ударяется о крышу соседнего дома. На каком расстоянии от дома нужно расположить катапульту, чтобы после упругого удара об эту крышу он поднялся на наибольшую возможную высоту над землёй? Высота дома H , наклон ската крыши 45° . Влиянием воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g .



Решение.

При упругом ударе энергия сохраняется. Максимум высоты будет достигнут, когда шарик после удара о крышу отскочит вертикально, так как в этом случае вся кинетическая энергия перейдёт в потенциальную в верхней точке траектории. Поскольку крыша наклонена под углом 45° , для этого нужно, чтобы шарик упал на крышу горизонтально. (3 б.)

Обозначим за x_1 расстояние по горизонтали от стены дома до места удара о крышу. Тогда, с одной стороны, расстояние по горизонтали от катапульты до точки удара о крышу равно $x + x_1$, а с другой стороны, оно равно половине дальности полёта тела, брошенного со скоростью v под углом α к горизонту:

$$x + x_1 = \frac{1}{2} \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

Так как угол наклона крыши 45° , то расстояние по вертикали от нижнего края крыши до места удара равно x_1 . (1 б.)

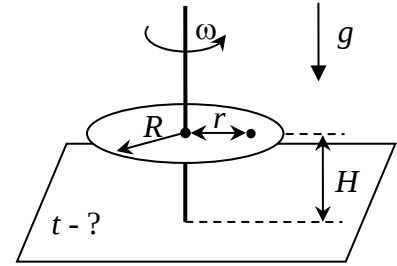
С одной стороны, расстояние по вертикали от катапульты до точки удара о крышу равно $H + x_1$, а с другой стороны, оно равно максимальной высоте подъёма тела, брошенного со скоростью v под углом α к горизонту:

$$H + x_1 = \frac{(v \sin \alpha)^2}{2g}. \quad (2) \quad (2 \text{ б.})$$

Вычитая (2) из (1) и выражая x из полученного равенства, найдём

$$\text{ответ: } x = H + \frac{v^2 (\sin 2\alpha - \sin^2 \alpha)}{2g}. \quad (2 \text{ б.})$$

4. Над столом на высоте H с угловой скоростью ω вращается горизонтальный диск радиуса R . На расстоянии r от оси к диску приклеено небольшое тело. Внезапно тело отклеивается, и сила сцепления между диском и телом исчезает. Через какое время t тело достигнет стола? Трением и влиянием воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g .



Решение.

После отклеивания тело по инерции будет скользить по диску прямолинейно и равномерно, сохраняя величину и направление скорости, которые оно имело в момент отклеивания. Скорость равна

$$v = \omega r. \quad (2 \text{ б.})$$

и направлена перпендикулярно радиусу в точке отклеивания. Таким образом, центр диска, точка отклеивания и точка, в которой тело достигло края диска, образуют прямоугольный треугольник. Путь x , пройденный телом до края диска, найдём по теореме Пифагора:

$$x = \sqrt{R^2 - r^2}. \quad (2 \text{ б.})$$

Этот путь пройден за время

$$t_1 = \frac{x}{v} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{\omega r}. \quad (2 \text{ б.})$$

После этого, тело начинает свободно падать, и достигнет поверхности стола за время

$$t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (2 \text{ б.})$$

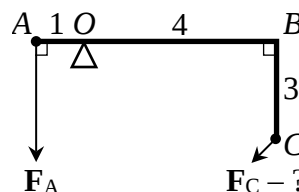
Поэтому, после отклеивания тело достигнет стола через время $t_1 + t_2$.

$$\text{Ответ: } t = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{\omega r} + \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (2 \text{ б.})$$

Каждая правильно решенная задача оценивается в 10 баллов.

Физика 10 класс.

1. Невесомый Г-образный жёсткий стержень ABC (угол B — прямой) может свободно вращаться вокруг точки O . Длины отрезков AO , OB и BC равны, соответственно, 1 см, 4 см и 3 см. В точке A к стержню перпендикулярно отрезку AB приложена сила $F_A = 60$ Н. Найти минимальное значение силы F_C , которую, выбрав оптимальное направление, нужно приложить к стержню в точке C , чтобы стержень находился в равновесии.



Решение.

Чтобы стержень находился в равновесии, моменты сил F_A и F_C , вращающих стержень в противоположных направлениях, должны быть по модулю равны:

$$F_A \cdot |OA| = F_C \cdot |OX|, \quad (1) \quad (3 \text{ б.})$$

где плечо $|OX|$ силы F_C равно длине перпендикуляра OX , проведённого на линию действия силы F_C из точки O . Из уравнения видно, что минимальное значение силы F_C соответствует максимальному значению $|OX|$. Гипотенуза прямоугольного треугольника не меньше катета, поэтому в треугольнике OXB $|OC| \geq |OX|$. Значит, максимальное значение $|OX|$ равно $|OC|$, что достигается, когда сила F_C направлена перпендикулярно отрезку OC . Минимальное значение силы F_C можно найти из уравнения (1), заменив в нём $|OX|$ на $|OC|$:

$$F_C^{\min} = F_A \cdot \frac{|OA|}{|OC|}. \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

Гипотенузу $|OC|$ прямоугольного треугольника OBC найдём по теореме Пифагора:

$$|OC| = \sqrt{|OB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ см} = 5 \text{ см}, \quad (2 \text{ б.})$$

и подставив её в (2) вместе со значением F_A и $|OA|$, заданными по условию, получим

$$\text{ответ: } F_C^{\min} = 12 \text{ Н.} \quad (2 \text{ б.})$$

2. Какое минимальное количество n шариков нужно проколоть в связке из $N = 25$ одинаковых шариков, надутого гелием, чтобы при нормальных условиях связка перестала подниматься вверх? Объём шарика $V = 10$ л, масса проколотого шарика $m = 6$ г, молекулярная масса воздуха $\mu_v = 29$ г/моль, гелия $\mu_r = 4$ г/моль, объём одного моля при нормальных условиях $V_0 = 22,4$ л, объёмом проколотого шарика пренебречь.

Решение.

На каждый непроколотый шарик действует сила тяжести $(m + m_r)g$ и сила Архимеда $m_v g$, где m_r — масса содержащегося в шарике гелия, а m_v — масса вытесненного шариком воздуха. Поскольку количество молей газа в объёме шарика равно V/V_0 , то $m_r = \mu_r \cdot V/V_0$, а $m_v = \mu_v \cdot V/V_0$. Пусть n — число проколотых шариков, тогда гелием наполнены $(N - n)$ шариков. Чтобы связка не поднималась, сила тяжести связки должна превышать полную силу Архимеда:

$$Nmg + (N - n) \frac{V}{V_0} \mu_{\Gamma} g > (N - n) \frac{V}{V_0} \mu_{\text{В}} g . \quad (1) \quad (8 \text{ б.})$$

Отсюда находим

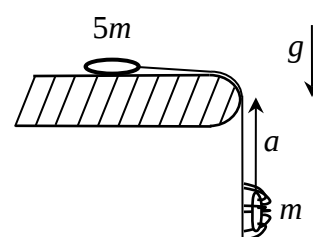
$$n > N \left(1 - \frac{V_0}{V} \frac{m}{\mu_{\text{В}} - \mu_{\Gamma}} \right).$$

Подставив численные значения величин, получим $n > 11,6$. Минимальное n , удовлетворяющее этому условию, равно 12.

Ответ: 12 шариков. (2 б.)

Примечание: уравнение (1) с упущенным вторым слагаемым в левой части оценивается в 6 баллов.

3. Паучок поднимается по паутинке, двигаясь с ускорением $a = 0,2g$ относительно стола. Паутинка прикреплена к камешку, находящемуся на столе. Масса камешка в 5 раз больше массы паучка, и в начальный момент они имели нулевые скорости и находились на одинаковом расстоянии до края стола. Паучок или камешек раньше достигнет края стола? Трением и размерами камешка и паучка пренебречь.



Решение.

На камешек действует сила натяжения нити T , а на паучка эта же сила T , направленная вверх, и сила тяжести mg , направленная вниз. Запишем второй закон Ньютона для камешка и паучка:

$$T = 5ma_{\text{к}} , \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

$$T - mg = ma . \quad (2) \quad (4 \text{ б.})$$

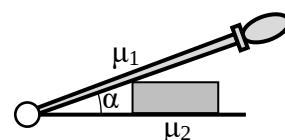
Здесь $a_{\text{к}}$ — ускорение камешка. По условию, $a = 0,2g$ (или $g = 5a$). Подставив в (2) $g = 5a$ и T из (1), получим, сократив на m ,

$$a_{\text{к}} = \frac{6}{5} a . \quad (2 \text{ б.})$$

То есть $a_{\text{к}} > a$. При равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью быстрее пройдёт заданный путь то тело, которое движется с бóльшим ускорением. Поскольку паучок и камешек в начальный момент имели нулевые скорости и находились на равном расстоянии от края стола, камешек, движущийся с бóльшим ускорением, раньше достигнет края стола.

Ответ: камешек. (2 б.)

4. С помощью резака на шарнире разрезают плоский толстый пластмассовый лист, лежащий на столе. Коэффициент трения между резак и листом равен μ_1 , а между листом и столом — μ_2 . Резак медленно опускают, уменьшая угол α его наклона к столу. Вначале лист не разрезается, а скользит по столу. При каком угле α резак начнёт разрезать лист? Весом листа пренебречь.



Решение.

На лист действуют следующие силы. Со стороны резака — сила реакции N_1 , направленная перпендикулярно резаку вниз под углом α к нормали к столу, и сила трения $F_{\text{тр}1}$, направленная влево вдоль резака под углом α к столу. Со стороны стола — сила реакции N_2 , направленная перпендикулярно столу вверх, и сила трения $F_{\text{тр}2}$, направленная влево вдоль стола. Поскольку лист скользит, силы трения равны своим максимальным значениям:

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1, \quad F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2. \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

Резак начнёт резать, когда действующие на него силы уравновесят друг друга, так что лист перестанет перемещаться. Запишем условие равенства сил в проекциях, соответственно, на ось, направленную вдоль поверхности стола, и на ось, перпендикулярную поверхности стола:

$$F_{\text{тр}2} - N_1 \sin \alpha + F_{\text{тр}1} \cos \alpha = 0, \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

$$N_1 \cos \alpha + F_{\text{тр}1} \sin \alpha - N_2 = 0. \quad (3) \quad (3 \text{ б.})$$

Подставим в полученные равенства выражения для сил трения из (1), а затем выразим N_2 из (3) и подставим в (2). В результате, сократив на N_1 , получим равенство:

$$\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha = \mu_2 (\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha),$$

из которого найдём

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu_1 + \mu_2}{1 - \mu_1 \mu_2}.$$

$$\text{ответ: } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\mu_1 + \mu_2}{1 - \mu_1 \mu_2}. \quad (2 \text{ б.})$$

Каждая правильно решенная задача оценивается в 10 баллов.

Физика 11 класс.

1. Кусок однородной проволоки длины 10 см разрезали на два куска. Найти длины этих кусков, если при параллельном соединении их общее сопротивление составило 0,21 от сопротивления исходного куска.

Решение.

Сопротивление проволоки длины L с удельным сопротивлением ρ и сечением S равно

$$R = \frac{\rho}{S} L. \quad (1) \quad (1 \text{ б.})$$

Если проволока однородная, то сопротивление куска проволоки пропорционально его длине. Обозначим длины двух кусков, получившихся после разрезания проволоки, l_1 и l_2 :

$$l_1 + l_2 = L. \quad (2) \quad (1 \text{ б.})$$

При параллельном соединении складываются обратные сопротивления, поэтому получившееся сопротивление $R_{\parallel}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{R_{\parallel}} = \frac{1}{\frac{\rho}{S} l_1} + \frac{1}{\frac{\rho}{S} l_2}. \quad (2 \text{ б.})$$

Умножив это уравнение на (1), получим

$$\frac{R}{R_{\parallel}} = \frac{L^2}{l_1 l_2}. \quad (2 \text{ б.})$$

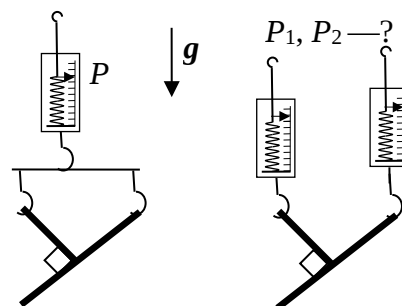
По условию, $R_{\parallel} / R = 0,21$. Поэтому

$$l_1 l_2 = 0,21 L^2. \quad (3) \quad (2 \text{ б.})$$

Решая систему уравнений (2) и (3), найдём $l_1 = 0,3L$ и $l_2 = 0,7L$ (или $l_1 = 0,7L$ и $l_2 = 0,3L$). Подставив значение $L = 10$ см, получим

$$\text{ответ: } 3 \text{ см и } 7 \text{ см.} \quad (2 \text{ б.})$$

2. Конструкция в форме буквы “У” состоит из трёх одинаковых брусков, сделанных из однородного материала, склеенных в одной точке как показано на рисунке. Конструкцию взвесили при помощи пружинных весов, которые показали значение P . Какими будут показания двух пружинных весов, присоединённых к двум разным концам конструкции, при условии прежней ориентации буквы “У”?



Решение. Пусть m — масса одного бруска. Тогда первое взвешивание даёт:

$$P = 3mg. \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

Для второго взвешивания запишем уравнение баланса сил

$$P_1 + P_2 = 3mg \quad (2) \quad (2 \text{ б.})$$

и уравнение баланса моментов сил относительно точки соединения трёх брусков

$$P_1 l - P_2 l - mg \frac{l}{2} = 0, \quad (3) \quad (4 \text{ б.})$$

где l — плечо силы P_1 относительно точки соединения брусков. (Моменты сил тяжести двух одинаково ориентированных брусков компенсируют друг друга, а сила тяжести третьего бруска обладает вдвое меньшим плечом по сравнению с силой P_1 .)

Выразив в уравнениях (2) и (3) mg через P с помощью (1), получим

$$P_1 + P_2 = P, \quad P_1 - P_2 = \frac{P}{6},$$

откуда найдём

$$\text{ответ: } P_1 = \frac{7}{12}P, \quad P_2 = \frac{5}{12}P. \quad (2 \text{ б.})$$

3. В длинную тонкую цилиндрическую трубку, закрытую с одного конца, вставлен лёгкий герметичный поршень, на котором находится электрический заряд. К закрытому концу трубки прикрепили электрический заряд того же знака. Давление воздуха под поршнем в 2 раза меньше чем внешнее атмосферное давление, при этом система находится в равновесии. Во сколько раз необходимо увеличить заряд поршня, чтобы объём воздуха под поршнем после установления равновесия увеличился в два раза? Температуру считать постоянной. Стенки трубки непроводящие. Трением пренебречь.

Решение. Сила давления воздуха на поршень $(P_0 - P)S$, где P_0 — атмосферное давление, P — давление под поршнем, S — сечение поршня, уравновешивается кулоновской силой

$$F_q = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1) \quad (1 \text{ б.})$$

где q_1 и q_2 — заряд поршня и заряд, закреплённый на закрытом конце трубки, r — расстояние от поршня до закрытого конца трубки. То есть $(P_0 - P)S = F_q$. По условию, $P = P_0 / 2$. Поэтому

$$\left(P_0 - \frac{P_0}{2} \right) S = F_q. \quad (2) \quad (2 \text{ б.})$$

Когда объём под поршнем увеличился в 2 раза ($V' = 2V$), давление газа P' , согласно закону Бойля — Мариотта

$$PV = P'V', \quad (1 \text{ б.})$$

уменьшилось в 2 раза ($P' = P / 2 = P_0 / 4$). Поэтому, уравнение аналогичное (2) запишется теперь в виде

$$\left(P_0 - \frac{P_0}{4} \right) S = F_q', \quad (3) \quad (2 \text{ б.})$$

где F_q' — сила Кулона, изменившаяся за счёт увеличения расстояния между зарядами в 2 раза и за счёт изменения величины заряда в α раз (α — искомое отношение). Согласно (1),

$$\frac{F'_q}{F_q} = \frac{\alpha}{2^2} = \frac{\alpha}{4}. \quad (2 \text{ б.})$$

Разделив (3) на (2) и подставив $F'_q / F_q = \alpha / 4$ из предыдущего равенства, получим уравнение $3/2 = \alpha / 4$, решив которое, найдём

ответ: в 6 раз. (2 б.)

4. На наклонной плоскости, которая расположена под углом α к горизонту, покоятся два одинаковых бруска массы m , связанных между собой пружиной жёсткости k . В начальный момент пружинка недеформирована. Коэффициент трения между брусками и наклонной плоскостью $\mu = \operatorname{tg} \alpha$. Верхнему бруску ударом придали скорость v вверх вдоль наклонной плоскости. Найти максимальное сжатие пружинки, если известно, что в процессе всего движения нижний брусок вверх не перемещался. Ускорение свободного падения g .

Решение. На каждый брусок действуют следующие силы: сила тяжести mg , реакция опоры N , сила трения $F_{\text{тр}}$ и сила натяжения пружинки. Из баланса сил в проекции на ось, перпендикулярную поверхности, получаем $N = mg \cos \alpha$. Сила трения не превышает μN , где $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ согласно условию задачи. Таким образом, $|F_{\text{тр}}| \leq mg \sin \alpha$, причём равенство достигается, когда брусок движется. С другой стороны, проекция силы тяжести на направление вдоль плоскости вниз равна $mg \sin \alpha$. В результате получим следующие утверждения о равнодействующей трёх сил mg , N и $F_{\text{тр}}$:

(Утв. 1) Когда брусок движется вниз, равнодействующая сил mg , N и $F_{\text{тр}}$ равна нулю. (1 б.)

(Утв. 2) Когда брусок движется вверх, равнодействующая сил mg , N и $F_{\text{тр}}$ равна $2mg \sin \alpha$ и направлена вдоль плоскости вниз. (1 б.)

(Утв. 3) В любом случае равнодействующая сил mg , N и $F_{\text{тр}}$ либо равна нулю, либо направлена вдоль плоскости вниз.

Движение системы брусков состоит из трёх этапов:

- 1) верхний брусок движется вверх, нижний неподвижен, пружина растянута;
- 2) верхний брусок движется вниз до своего первоначального положения, нижний неподвижен, пружина растянута;
- 3) оба бруска движутся вниз.

Рассмотрим их подробнее.

Этап 1. Нижний брусок не движется вверх (по условию задачи). Он также не может двигаться вниз, т. к. для разгона вниз на него должна действовать равнодействующая сила, направленная вниз по склону, чего быть не может (натяжение пружины тянет вверх, а прочие силы при движении вниз компенсируют друг друга, согласно Утв. 1). Таким образом, пока верхний брусок движется вверх, нижний покоится. (1 б.)

Найдём перемещение верхнего бруска Δx_1 во время 1-го этапа (до остановки). Кинетическая энергия бруска $mv^2/2$ переходит в упругую энергию пружины $k(\Delta x_1)^2/2$ за вычетом работы против сил тяжести и трения, равной $\Delta x_1 2mg \sin \alpha$ (см. Утв. 2). Таким образом,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k(\Delta x_1)^2}{2} + \Delta x_1 2mg \sin \alpha, \quad (1 \text{ б.})$$

откуда

$$\Delta x_1 = \frac{-2mg \sin \alpha + \sqrt{(2mg \sin \alpha)^2 + km v^2}}{k}. \quad (1)$$

Этап 2. По тем же причинам, что и на 1-м этапе, нижний брусок будет покоиться, пока пружинка остаётся растянутой, т. е. пока верхний брусок не достигнет своего первоначального положения. Во время движения верхнего бруска вниз энергия растяжения пружины постепенно переходит в кинетическую энергию этого бруска (т. к. все силы, действующие на него, кроме силы натяжения пружины, компенсируют друг друга согласно Утв. 1). Поэтому

$$\frac{k(\Delta x_1)^2}{2} = \frac{mu^2}{2}, \quad (2) \quad (1 \text{ б.})$$

где u — скорость верхнего бруска в конце 2-го этапа, т. е. в момент, когда пружина недеформирована.

Этап 3. Когда пружина начала сжиматься, нижний брусок начал двигаться вниз, (1 б.) поскольку равнодействующая сил mg , N и $F_{\text{пр}}$ не может быть направлена вверх (Утв. 3), а значит, не может компенсировать направленную вниз силу, с которой сжатая пружинка действует на нижний брусок.

С этого момента на каждый брусок действует только сила со стороны пружинки (все прочие силы компенсируют друг друга согласно Утв. 1). Поэтому сохраняется суммарный импульс системы брусков $mv_1(t) + mv_2(t)$ и сумма кинетических энергий брусков и энергии деформации пружинки $mv_1^2(t)/2 + mv_2^2(t)/2 + k\Delta x^2(t)/2$.

В момент максимального сжатия пружинки скорости брусков одинаковы. Обозначив их v' , найдём из сохранения импульса и энергии:

$$mv' + mv' = mu, \quad (3)$$

$$\frac{mv'^2}{2} + \frac{mv'^2}{2} + \frac{k\Delta x'^2}{2} = \frac{mu^2}{2}, \quad (4)$$

где $\Delta x'$ — искомое максимальное сжатие пружинки.

Из (3) найдём, что $v' = u/2$. Подставив это значение в (4), получим:

$$\frac{k\Delta x'^2}{2} = \frac{mu^2}{4}. \quad (5) \quad (1 \text{ б.})$$

Сравнивая (2) с (5), найдём, что

$$\Delta x' = \frac{\Delta x_1}{\sqrt{2}}, \quad (1 \text{ б.})$$

и подставив Δx_1 из (1), получим

$$\text{ответ: } \Delta x' = \frac{-2mg \sin \alpha + \sqrt{(2mg \sin \alpha)^2 + km v^2}}{k\sqrt{2}}. \quad (2 \text{ б.})$$